Έστω $\Delta = \{(-\infty, \beta] : \beta \in \mathbb{R}\}$

$\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, Δ κλειστό στις πεπερ. τομές, $\mu(A) = \nu(A)$, $\forall A \in \Delta$

Οδο ισχύει το ii.

$\mu(\mathbb{R}) = \lim_n \mu((-\infty, \beta]) = \lim_n \nu((-\infty, \beta]) = \nu(\mathbb{R}) < \infty$ διότι τα μ, ν πεπερασμένα.

Πληρότητα:

Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ και $N \subset A$ τότε το $\mu(N)$ ενδεχομένως δεν ορίζεται διότι δεν ξέραμε αν $N \in \mathcal{A}$ ή $N \notin \mathcal{A}$.

Αν $N \in \mathcal{A}$ τότε σίγουρα $\mu(N) \leq \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(N) = 0$

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου

Ένα σύνολο $N \subset X$ λέγεται μ-μηδενικό αν υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $N \subset A$ και $\mu(A) = 0$.

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου

Ο χώρος $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται πλήρης (και το μ πλήρες) αν για κάθε μ-μηδενικό σύνολο N ισχύει $N \in \mathcal{A}$ και άρα $\mu(N) = 0$

Ορισμός: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου

Ορίζουμε:

$\mathcal{A}_\mu$ = Οικογένεια όλων των υποσυνόλων του X ώστε $\exists E, F \in \mathcal{A}$ με $E \subset A \subset F$: $\mu(F \setminus E) = 0$. Η $\mathcal{A}_\mu$ λέγεται πλήρωση της $\mathcal{A}$ ως προς το μέτρο μ.

Παρατήρηση:

$\mu(E) = \mu(F)$ διότι $F = E \cup (F \setminus E)$ ξένα

Άρα, $\mu(F) = \mu(E) + \underbrace{\cancel{\mu(F \setminus E)}}^{0} = \mu(E)$

Ορίζουμε επίσης, $\bar{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, +\infty]$ με $\bar{\mu}(A) = \mu(E)$ όπου το E όπως παραπάνω όπου το $\bar{\mu}$ θα λέγεται πλήρωση του μέτρου μ.

Παρατήρηση (Ανεξάρτητη επιλογή συνόλων: $F_i, E_i, \forall i$)

Αν $E_1 \subset A \subset F_1$ ώστε $\mu(F_1 \setminus E_1) = 0$ και

$E_2 \subset A \subset F_2$ ώστε $\mu(F_2 \setminus E_2) = 0$

Τότε $\mu(E_1) = \mu(E_2)$, διότι $\mu(E_1) = \mu(F_1)$ & $\mu(E_2) = \mu(F_2)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Εφόσον } \underset{\mathcal{A}}{\underset{\uparrow}{E_1}} \subset A \subset \underset{\mathcal{A}}{\underset{\uparrow}{F_2}} \Rightarrow \mu(E_1) \le \mu(F_2) = \mu(E_2) \\ \text{και όμοια,} \\ \text{Εφόσον } E_2 \subset A \subset F_1 \Rightarrow \mu(E_2) \le \mu(F_1) = \mu(E_1) \end{array}\right\} \mu(E_1) = \mu(E_2)$$

Συνεπώς, ο ορισμός παραπάνω είναι "καλός".

Επίσης, $\bar{\mu}(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\}$

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}_\mu, \bar{\mu})$ λέγεται πλήρωση του χώρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Τα στοιχεία της $\mathcal{A}_\mu$ λέγονται μ-μετρήσιμα σύνολα

Πρόταση

Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου τότε:

i) $\mathcal{A}_\mu$ είναι σ-Άλγεβρα με $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$

ii) $\bar{\mu}$ πλήρες μέτρο με $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$

iii) $\bar{\mu}$ είναι το μοναδικό μέτρο στην $\mathcal{A}_\mu$: $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$

iv) μ πλήρες αν.ν $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}$ (άρα $\mu = \bar{\mu}$)

Απόδειξη

Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε θέτουμε $F = A = E$ στον ορισμό της $\mathcal{A}_\mu$

Συμπεραίνουμε ότι $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$

Άρα, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$ και $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$

i) • $X \in \mathcal{A}_\mu$ (άμεσο αφού $X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$)

• Ας είναι $A \in \mathcal{A}_\mu$ τότε $\exists\, E, F \in \mathcal{A}$: $E \subset A \subset F$ & $\mu(F \setminus E) = 0$

$\underset{\mathcal{A}}{\underset{\uparrow}{X \setminus F}} \subset X \setminus A \subset \underset{\mathcal{A}}{\underset{\uparrow}{X \setminus E}}$ όπου $(X \setminus E) \setminus (X \setminus F) = F \setminus E$ με

$\mu((X \setminus E) \setminus (X \setminus F)) = 0$. Άρα $X \setminus A \in \mathcal{A}_\mu$

• Έστω $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ εν $\mathcal{A}_\mu$ τότε $\forall n \in \mathbb{N}$: $\exists\, E_n, F_n \in \mathcal{A}$: $E_n \subset A_n \subset F_n$

ώστε $\mu(F_n \setminus E_n) = 0$. Τότε, $\underset{\mathcal{A}}{\underset{\uparrow}{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \underset{\mathcal{A}}{\underset{\uparrow}{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}}$

Όμως, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \setminus E_n)$

όπου $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n \setminus E_n)\right) = 0 \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \setminus E_n) = 0$

Άρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\mu$

Συνεπώς, $\mathcal{A}_\mu$ σ-άλγεβρα

ii) Θδο $\bar{\mu}$ είναι μέτρο

- $\bar{\mu}/\emptyset = \mu(\emptyset) = 0$

- Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένα ανά δύο στην $\mathcal{A}_\mu$ και άρα $E_n \subset A_n \subset F_n$ με $\mu(F_n \setminus E_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \underset{(i)}{=} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \underset{\text{ανά δύο}}{\overset{E_n \text{ ξένα}}{=}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$

Άρα, πράγματι το $\bar{\mu}$ μέτρο

Επίσης το $\bar{\mu}$ είναι πλήρες μέτρο διότι:

αν $N \subset X$ και $A \in \mathcal{A}_\mu$ ώστε $N \subset A$ και $\bar{\mu}(A) = 0$

Τότε $\exists E, F \in \mathcal{A}$: $E \subset A \subset F$ και $\mu(F \setminus E) = 0$

Επίσης, $\bar{\mu}(A) = 0$, δηλ. $\mu(E) = 0$ Άρα και $\mu(F) = 0$

Έτσι $\emptyset \subset N \subset F$ ώστε $\mu(F \setminus \emptyset) = 0 \Rightarrow N \in \mathcal{A}_\mu$

iii) Έστω ότι $\exists\, \nu \in \mathcal{A}_\mu$ ώστε $\nu/\mathcal{A} = \mu$

Έστω $A \in \mathcal{A}_\mu \to \exists E, F \in \mathcal{A}$: $E \subseteq A \subseteq F$ Τότε

$\mu(E) \overset{\text{υπόθ}}{=} \nu(E) \leq \nu(A) \leq \nu(F) \overset{\text{υπόθ}}{=} \mu(F)$

Αφού, όμως $\mu(E) = \mu(F) \Rightarrow \nu(A) = \mu(E) \Rightarrow \nu(A) = \bar{\mu}(A)$

Άρα, $\nu = \bar{\mu}$

iv) Αν $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}$ τότε από (ii) το $\bar{\mu} = \mu \Rightarrow \mu$ πλήρες

Αντίστροφα, έστω ~~𝒜~~ μ πλήρες και $A \in \mathcal{A}_\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists E, F \in \mathcal{A}$ με $E \subset A \subset F$: $\mu(F \setminus E) = 0$. Τότε, αφού

$A = E \cup (A \setminus E)$ και $A \setminus E \subset F \setminus E$: $\mu(F \setminus E) = 0$ άρα αφού μ πλήρες τοτε $A \setminus E \in \mathcal{A} \Rightarrow A = \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{E}} \cup \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{(A-E)}} \in \mathcal{A}$

Τουτέστιν, $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}$.

Παραδείγματα

1) Το αριθμητικό μέτρο είναι πλήρες αφού το μοναδικό ~~μ~~ μηδενικό σύνολο είναι το $\emptyset \in \mathcal{A}$

2) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, $x \in X$ & $\mu = \delta_x$ (Dirac)
Αν $\{x\} \in \mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$ τοτε το μ όχι πλήρες.
Τοτε $\forall A \subset X$: $A = (A \cap \{x\}) \cup (A \cap X \setminus \{x\})$
και $A \cap \{x\} = \emptyset$ ή $\{x\} \in \mathcal{A}$ και $A \cap X \setminus \{x\}$ είναι
μ-μηδενικό αφού $A \cap X \setminus \{x\} \subset X \setminus \{x\} \Rightarrow$
$\mu(A \cap X \setminus \{x\}) \leq \mu(X \setminus \{x\}) = 0 \Rightarrow \mu(A \cap X \setminus \{x\}) = 0$.
Άρα, $A \cap X \setminus \{x\} \in \mathcal{A}_\mu$. Τουτέστιν, $A \in \mathcal{A}_\mu$
Άρα, αποδείξαμε ότι $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{P}(X) \neq \mathcal{A} \Rightarrow \mu$ όχι πλήρες

Συμβολισμός

Αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων (του X)
Θέτουμε $\liminf_n A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ και

$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$

όπου,

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m := \{x : \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A_n, \forall n \geq n_0\}$

και

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m := \{x : x \in A_n$ για άπειρα $n\}$

Προφανώς, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (*)

Ασκήσεις:

1) Έστω X σύνολο

α. Αν $(A_n) \uparrow$ ακολουθία συνόλων τοτε ισχύει:

$\liminf_n A_n = \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

β. Αν (A_n) φθίνουσα ακολουθία συνόλων τότε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n = \limsup_n A_n$$

γ. Να δοθεί παράδειγμα ακολουθίας συνόλων $(A_n) \in \mathcal{P}(X)$ ώστε $\liminf A_n = \emptyset$ και $\limsup A_n = X$

Λύση

α. Αρκεί νδο $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_n A_n$

Εστω $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : x \in A_{n_0} \xRightarrow{(A_n)\uparrow} x \in A_n, \ n \geq n_0$
$\Rightarrow x \in \liminf_n A_n$.
Απο την (*) συμπεραίνουμε ότι $\liminf_n A_n = \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

β. Αρκεί νδο $\limsup_n A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Εστω $x \in \limsup A_n$
Τοτε το σύνολο $I = \{ i \in \mathbb{N} : x \in A_i \}$ είναι άπειρο
Εστω $n \in \mathbb{N}$, τότε $\exists i_0 \in I : i_0 \geq n$
Εφοσον $(A_n) \downarrow$ τοτε $A_{i_0} \subset A_n$ ομως $x \in A_{i_0} \Rightarrow x \in A_n$
Αρα, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ Αρα, απο την (*) επεται το ζητούμενο

γ. Θέτουμε

$$A_n = \begin{cases} \emptyset, & n \text{ αρτιος} \\ X, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

2) Εστω $\mathcal{F}$ οικογένεια υποσυνόλων του X και ας είναι $A \in \sigma(\mathcal{F})$. Νδο $\exists \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ με $\mathcal{C}$ αριθμήσιμο : $A \in \sigma(\mathcal{C})$

Λύση

Θέτουμε $\mathcal{A} = \{ A \in \sigma(\mathcal{F}) : \exists \mathcal{C} \subset \mathcal{F}, \ \mathcal{C} \text{ αριθμ. με } A \in \sigma(\mathcal{C}) \}$
Αρκεί νδο $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$, (και άρα $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$)

Πρωτο βήμα: Οδο $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$

Έστω $A \in \mathcal{F}$ τότε για $\mathcal{C} = \{A\}$ αριθμ. και $A \in \sigma(\mathcal{C})$.

Δεύτερο βήμα: Οδο $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα

- $X \in \mathcal{A}$ (αφού $X \in \sigma(\emptyset)$)
- $\mathcal{A}$ κλειστή στα συμπληρώματα αφού $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ με $\mathcal{C}$ αριθμ. : $A \in \sigma(\mathcal{C}) \xRightarrow{\sigma(\mathcal{C})\ \sigma\text{-αλγ.}} X \setminus A \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ κλειστή στις αριθμ. ενώσεις αφού $\forall (A_n) \in \mathcal{A}$ και για κάθε n. $\exists \mathcal{C}_n \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{C}_n$ αριθμ. με $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n)$.

 Το σύνολο $\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ αριθμ. ως αριθμήσιμη ένωση αριθμ. συν. και μάλιστα $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n) \subset \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{C})$

 Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Άρα, $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα.

Και η απόδειξη είναι πλήρης.

Σχόλιο - Άσκηση 1 (Εκτός)

Αν X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος ($\Rightarrow X$ είναι δεύτερης αριθμησιμότητας) τότε, $\exists \mathcal{C} \subset \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{C}$ αριθμ. ώστε $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{C})$

Απόδειξη

Κάθε αριθμήσιμος μ.χ $\Rightarrow$ έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του δηλ. $\exists \mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ αριθμήσιμο ώστε $\forall A \in \mathcal{T}$, $\exists \mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$: $A = \bigcup \mathcal{C}'$

Άρα, $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{T}) \subset \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}(X) \subset \sigma(\mathcal{C})$

Από την άλλη μεριά $\mathcal{C} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{T}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(X)$

Άρα, $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{C})$

Σχόλιο - Άσκηση 2 (Εκτός)

Αν X διαχωρίσιμος μ.χ τότε $\mathcal{B}(X)$ έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο με το συνεχές.

Απόδειξη (όχι αναλυτική)

$\mathcal{B}(X) := \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{B}_\alpha$ όπου $\mathcal{B}_0 = \mathcal{C}$ (με $\mathcal{C}$ μία αριθμ. βάση για την τοπολογία). Ορίζουμε $\mathcal{B}_{\alpha+1}$ = "όλες οι αριθμήσιμες ενώσεις και συμπληρώματα στοιχείων της $\mathcal{B}_\alpha$"

Αν β οριακός διατακτικός αριθμός

$\mathcal{B}_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{B}_\alpha$ κάθε $\mathcal{B}_\alpha$ έχει πληθάριθμο $\leq$ του συνεχούς

Άρα η $\mathcal{B}(X)$ έχει πληθάριθμο $\leq$ συνεχούς.

Συμπέρασμα:

Η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$: τα Borel του $\mathbb{R}$ έχει πληθάριθμο $\leq$ του συνεχούς

3) (το πλήθος στοιχείων μίας σ-άλγεβρας)

Έστω $\mathcal{A}$ μία σ-άλγεβρα στο σύνολο X.

Κάθε σ-άλγεβρα είναι είτε υπεραριθμήσιμη είτε πεπερασμένη με 2^n στοιχεία για κάποιο $n \in \mathbb{N}$

Λύση

Έστω $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα. Αρκεί νδο αν $\mathcal{A}$ αριθμήσιμη σ-άλγεβρα τότε $card(\mathcal{A}) = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ πεπερασμένη

Ορίζουμε τη σχέση $\sim$ στο X ως εξής:

$x \sim y$ ανν $\forall A \in \mathcal{A}: x \in A \Leftrightarrow y \in A$ (σχέση ισοδυναμίας)

Έτσι το X χωρίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας.

Αν $x \in X$, η κλάση ισοδ. του x είναι η εξής:

$\bar{x} = \bigcap \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ τα οποία αφού $\mathcal{A}$ αριθμήσιμη προφανώς ανήκουν στην $\mathcal{A}$ (Δηλ. $\bar{x} \in \mathcal{A}$, $\forall x \in X$) (*)

Ορίζουμε ως: $\mathcal{E} = \mathcal{A}/_{\sim}$ = "το σύνολο όλων των κλασ. ισοδ"

και θέτουμε $\mathcal{A}_\mathcal{E} = \{\bigcup \mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \mathcal{E}\}$.

Από την (*) η $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ και αφού $\mathcal{A}$ αριθμήσιμη τότε και η $\mathcal{A}_\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $\forall x \in \mathcal{A}$: $\bar{x} \subset A \Rightarrow \bigcup_{x \in A} \bar{x} \subset A$

$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} \bar{x} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_\mathcal{E}$. Συνεπώς, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathcal{E}$

Ισχυρισμός: Η $\mathcal{E}$ πεπερασμένη

Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{E}$ είναι άπειρα αριθμήσιμη

$\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ μη κενά σύνολα & ξένα ανά δύο

Ορίζουμε την $\varphi: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_\mathcal{E} = \mathcal{A}$. Όπου: $\varphi(I) = \bigcup_{i \in I} E_i$

για κάθε $I \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Η φ είναι 1-1 λόγω ότι $E_i \neq \emptyset$, $\forall i$

και $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$. Εφόσον $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ υπεραριθμ. η $\mathcal{A}$ υπεραριθμήσιμη πράγμα άτοπο $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ πεπερασμ.

Αν $card(\mathcal{E}) = n$ τότε η $\varphi: \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \mathcal{A}$

με τιμή $\varphi(I) = \bigcup_{i \in I} E_i$ είναι 1-1 και επί

Άρα, $card\, \mathcal{A} = 2^n$.